

1. Neka diskretni izvor informacija bez memorije emituje slučajni niz sa tri moguća simbola $S = \{S_1, S_2, S_3\}$ i neka su vjerovatnoće emitovanja simbola $P(S_1) = \frac{1}{2}$, $P(S_2) = \frac{1}{4}$ i $P(S_3) = \frac{1}{4}$. Izračunati entropiju sistema u: a) Shannon-ima, b) Hartley-ima i c) Nat-ima.

Rješenje:

$$H(S) = -\sum_{i=1}^n P(S_i) \log_a P(S_i)$$

a) Osnova logaritma je $a = 2$

$$H(S) = -\sum_{i=1}^n P(S_i) \log_a P(S_i) = -[P(S_1) \log_2 P(S_1) + P(S_2) \log_2 P(S_2) + P(S_3) \log_2 P(S_3)]$$

$$H(S) = -\left[\frac{1}{2} \log_2 \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \log_2 \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \log_2 \frac{1}{4}\right]$$

$$\log_2 \frac{1}{2} = \log_2 2^{-1} = -\log_2 2 = -1$$

$$\log_2 \frac{1}{4} = \log_2 4^{-1} = -\log_2 4 = -2$$

$$H(S) = -\left[-\frac{1}{2} - 2 \cdot \frac{1}{4} - 2 \cdot \frac{1}{4}\right] = \frac{3}{2} = 1.5 \text{ Shannon}$$

b) Osnova logaritma je $a = 10$

$$H(S) = -\left[\frac{1}{2} \log_{10} \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \log_{10} \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \log_{10} \frac{1}{4}\right]$$

$$\log_{10} \left(\frac{1}{2}\right) = -0,3010$$

$$\log_{10} \left(\frac{1}{4}\right) = -0,6021$$

$$H(S) = 0,4515 \text{ Hartley}$$

c) Osnova logaritma je $a = e = 2,7281$

$$H(S) = -\left[\frac{1}{2} \log_e \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \log_e \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \log_e \frac{1}{4}\right]$$

$$\log_e \left(\frac{1}{2}\right) = -0,6931$$

$$\log_e \left(\frac{1}{4}\right) = -1,3863$$

$$H(S) = 1,0397 \text{ Nat}$$

2. Data je entropija diskretnog izvora informacija koja iznosi $H(S) = 1.5 \text{ Sh}$. Izraziti datu entropiju u a) Hartley-ima i b) Nat-ima.

Rješenje:

$$H_{Shannon}(S) = -\sum_{i=1}^n P(S_i) \log_2 P(S_i) = -\sum_{i=1}^n P(S_i) \frac{\log_{10} P(S_i)}{\log_{10} 2} = -\sum_{i=1}^n P(S_i) \frac{\log_e P(S_i)}{\log_e 2} = \frac{H_{Nat}(S)}{\log_e 2}$$

a) $H_{Hartley}(S) = H_{Shannon}(S) \log_{10} 2 = 0,4515$

b) $H_{Nat}(S) = H_{Shannon}(S) \log_e 2 = 1,0397$

3. Data je entropija diskretnog izvora informacija koja iznosi $H(S) = 0,4515 \text{ Hartley}$. Izraziti datu entropiju u a) Shannon-ima i b) Nat-ima.

Rješenje:

$$H_{Hartley}(S) = -\sum_{i=1}^n P(S_i) \log_{10} P(S_i) = -\sum_{i=1}^n P(S_i) \frac{\log_e P(S_i)}{\log_e 10} = \frac{H_{Nat}(S)}{\log_e 10}$$

a) $H_{Shannon}(S) = H_{Hartley}(S) \log_2 10 = 1,5$

b) $H_{Nat}(S) = H_{Hartley}(S) \log_e 10 = 1,0397$

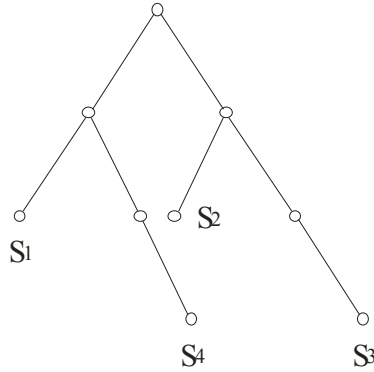
4. $S = \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$, binarni kod ($r = 2$)

S	(a)	(b)	(c)
S_1	00	1	0
S_2	10	100	01
S_3	111	101	110
S_4	011	11	11

- a) Nacrtati kodna stabla kodova (a), (b), (c)
- b) Provjeriti da li zadati kodovi zadovoljavaju Kraftovu nejednakost i koji od njih su trenutni.

Rješenje:

Kod (a)



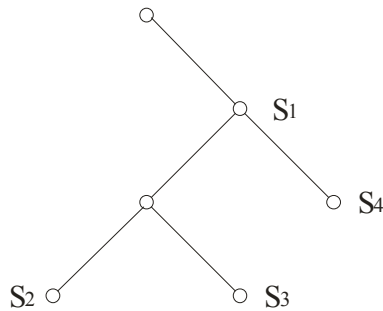
Kraftova nejednakost:

$$\sum_{i=1}^g 2^{-l_i} \leq 1$$

$$2^{-2} + 2^{-2} + 2^{-3} + 2^{-3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \leq 1 \text{ (zadovoljava)}$$

Jeste trenutni kod jer ni jedna kodna riječ nije prefiks druge kodne riječi.

Kod (b)

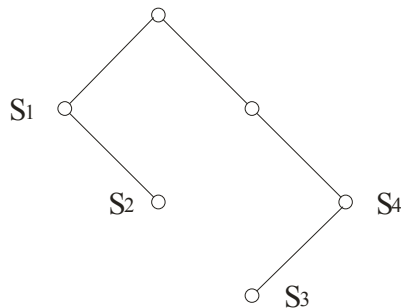


$$\sum_{i=1}^g 2^{-l_i} \leq 1$$

$$2^{-1} + 2^{-3} + 2^{-3} + 2^{-2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \leq 1 \text{ (za dovoljava)}$$

Nije trenutni kod, jer je simbol S_1 prefiks simbola S_4 .

Kod (c)



Kod (c) nije trenutni kod.

$$\sum_{i=1}^g 2^{-l_i} \leq 1$$

$$2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + 2^{-2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{9}{8} > 1$$

(ne zadovoljava)

5. Skup simbola izvorne liste čine slova riječi MATEMATIKA. Vjerovatnoće pojavljivanja ovih simbola su jednake vjerovatnoći pojavljivanja slova u datoj riječi. Hafmenovim binarnim kodom, Hafmenovim nebinarnim kodom i Šenon-Fanoovim kodom kodirati dati izvor, odrediti srednju dužinu kodne riječi i entropiju izvora.

Rješenje:

a) Binarni Hafmenov kod

$$S = \{M, A, T, E, I, K\}, \quad g = 6, \quad r = 2 \quad P(S) = \left\{ \frac{2}{10}, \frac{3}{10}, \frac{2}{10}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10} \right\}$$

S	P_i	X_i	S_1		S_2		S_3		S_4	
A	$\frac{3}{10}$	00	$\frac{3}{10}$	00	$\frac{3}{10}$	00	$\bullet \frac{4}{10}$	1	$* \frac{6}{10}$	0
M	$\frac{2}{10}$	10	$\frac{2}{10}$	10	$* \frac{3}{10}$	01	$\frac{3}{10} *$	00	$\frac{4}{10}$	1
T	$\frac{2}{10}$	11	$\frac{2}{10}$	11	$\frac{2}{10} \bullet$	10	$\frac{3}{10} *$	01		
E	$\frac{1}{10}$	011	$\bullet \frac{2}{10} *$	010	$\frac{2}{10} \bullet$	11				
I	$\frac{1}{10} \bullet$	0100	$\frac{1}{10} *$	011						
K	$\frac{1}{10} \bullet$	0101								

$$L = 2 \cdot \frac{3}{10} + 2 \cdot \frac{2}{10} + 2 \cdot \frac{2}{10} + 3 \cdot \frac{1}{10} + 4 \cdot \frac{1}{10} + 4 \cdot \frac{1}{10} = \frac{25}{10} = 2,5 \text{ b/simb}$$

$$H(S) = \frac{3}{10} \log \frac{10}{3} + \frac{2}{10} \log \frac{10}{2} + \frac{2}{10} \log \frac{10}{2} + \frac{1}{10} \log 10 + \frac{1}{10} \log 10 + \frac{1}{10} \log 10 = 2.4464 \text{ Sh/simb}$$

b) Nebinarni Hafmenov kod

$$S = \{M, A, T, E, I, K\}, g = 6, \quad r = 3 = \{0, 1, 2\}, P(S) = \left\{ \frac{2}{10}, \frac{3}{10}, \frac{2}{10}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10}, \frac{1}{10} \right\}$$

S	P_i	X_i	S_1		S_2	
A	$\frac{3}{10}$	1	$\frac{3}{10}$	1	$\frac{5}{10}$ *	0
M	$\frac{2}{10}$	2	$\frac{2}{10}$	2	$\frac{3}{10}$	1
T	$\frac{2}{10}$	00	$\frac{2}{10}$ *	00	$\frac{2}{10}$	2
E	$\frac{1}{10}$	02	$\frac{2}{10}$ •*	01		
I	$\frac{1}{10}$ •	010	$\frac{1}{10}$ *	02		
K	$\frac{1}{10}$ •	011				

Prvo redukovanje

$$g - (r-1) \leq r$$

$$4 - (3-1) \leq 3$$

$$6 - (3-1) \leq 3$$

$2 \leq 3$ zadovoljava (redukuju se dva simbola)

$4 \leq 3$ ne zadovoljava

Drugo redukovanje

$$g - (r-1) \leq r$$

$$5 - (3-1) \leq 3$$

$3 \leq 3$ zadovoljava (redukuju se tri simbola)

$$L = 1 \cdot \frac{3}{10} + 1 \cdot \frac{2}{10} + 2 \cdot \frac{2}{10} + 2 \cdot \frac{1}{10} + 3 \cdot \frac{1}{10} + 3 \cdot \frac{1}{10} = \frac{17}{10} = 1,7 \text{ b/simb}$$

$$H(S) = \frac{3}{10} \log \frac{10}{3} + \frac{2}{10} \log \frac{10}{2} + \frac{2}{10} \log \frac{10}{2} + \frac{1}{10} \log 10 + \frac{1}{10} \log 10 + \frac{1}{10} \log 10 = 2.4464 \text{ Sh/simb}$$

c) Šenon-Fanoov kod

A	$\frac{3}{10}$	0	00	00
M	$\frac{2}{10}$	0	01	01
T	$\frac{2}{10}$	1	10	100
E	$\frac{1}{10}$	1	10	101
I	$\frac{1}{10}$	1	11	110
K	$\frac{1}{10}$	1	11	111

$$L = 2 \cdot \frac{3}{10} + 2 \cdot \frac{2}{10} + 3 \cdot \frac{2}{10} + 3 \cdot \frac{1}{10} + 3 \cdot \frac{1}{10} + 3 \cdot \frac{1}{10} = \frac{25}{10} = 2,5 \text{ b/simb}$$

$$H(S) = \frac{3}{10} \log \frac{10}{3} + \frac{2}{10} \log \frac{10}{2} + \frac{2}{10} \log \frac{10}{2} + \frac{1}{10} \log 10 + \frac{1}{10} \log 10 + \frac{1}{10} \log 10 = 2.4464 \text{ Sh/simb}$$

6. Neka je data tranziciona matrica Markovljevog izvora I reda i neka su date vjerovatnoće stanja u početnom trenutku.

- Odrediti stacionarne vjerovatnoće stanja.
- Nacrtati dijagram stanja ovog procesa.
- Hafmenovim postupkom kodirati prelaskе kod ovog procesa i naći ukupnu srednju dužinu kodne riječi.

$$P = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,7 & 0,4 \\ 0,3 & 0,3 & 0,1 & 0,3 \\ 0,4 & 0,2 & 0,1 & 0,2 \\ 0,2 & 0,3 & 0,1 & 0,1 \end{bmatrix}$$

Vektor vjerovatnoća u početnom trenutku: $[0,2 \quad 0,3 \quad 0,3 \quad 0,2]$

Rješenje:

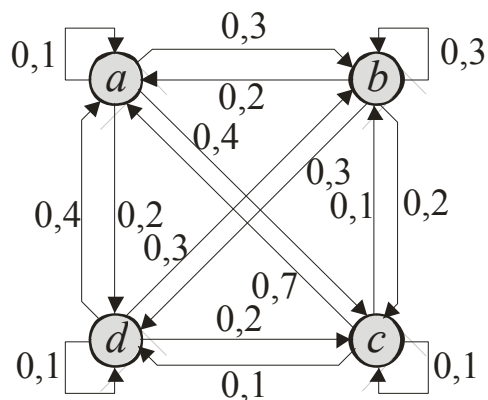
a) $p^T = P \cdot p_0^T$

$$\begin{bmatrix} P(a) \\ P(b) \\ P(c) \\ P(d) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,2 & 0,7 & 0,4 \\ 0,3 & 0,3 & 0,1 & 0,3 \\ 0,4 & 0,2 & 0,1 & 0,2 \\ 0,2 & 0,3 & 0,1 & 0,1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,2 \\ 0,3 \\ 0,3 \\ 0,2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} P(a) \\ P(b) \\ P(c) \\ P(d) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,1 \cdot 0,2 + 0,2 \cdot 0,3 + 0,7 \cdot 0,3 + 0,4 \cdot 0,2 \\ 0,3 \cdot 0,2 + 0,3 \cdot 0,3 + 0,1 \cdot 0,3 + 0,3 \cdot 0,2 \\ 0,4 \cdot 0,2 + 0,2 \cdot 0,3 + 0,1 \cdot 0,3 + 0,2 \cdot 0,2 \\ 0,2 \cdot 0,2 + 0,3 \cdot 0,3 + 0,1 \cdot 0,3 + 0,1 \cdot 0,2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,37 \\ 0,24 \\ 0,21 \\ 0,18 \end{bmatrix}$$

$P(a)=0,37$; $P(b)=0,24$; $P(c)=0,21$; $P(d)=0,18$

b)



c)

desilo se a

S	$P(S_i)$	X_i	S_1		S_2	
$P(c a)$	0,4	1	0,4	1	*0,6	0
$P(b a)$	0,3	00	0,3*	00	0,4	1
$P(d a)$	0,2•	010	•0,3*	01		
$P(a a)$	0,1•	011				

$$L_a = 1 \cdot 0,4 + 2 \cdot 0,3 + 3 \cdot 0,2 + 3 \cdot 0,1 = 0,4 + 0,6 + 0,6 + 0,3 = 1,9 \text{ b/simb}$$

desilo se *b*

S	$P(S_i)$	X_i	S_1		S_2	
$P(b b)$	0,3	00	•0,4	1	*0,6	0
$P(d b)$	0,3	01	0,3*	00	0,4	1
$P(a b)$	0,2•	10	0,3*	01		
$P(c b)$	0,2•	11				

$$L_b = 2 \cdot 0,3 + 2 \cdot 0,3 + 2 \cdot 0,2 + 2 \cdot 0,2 = 0,6 + 0,6 + 0,4 + 0,4 = 2 \text{ b/simb}$$

desilo se *c*

S	$P(S_i)$	X_i	S_1		S_2	
$P(a c)$	0,7	0	0,7	0	0,7	0
$P(b c)$	0,1	11	•0,2*	10	*0,3	1
$P(c c)$	0,1•	100	0,1*	11		
$P(d c)$	0,1•	101				

$$L_c = 1 \cdot 0,7 + 2 \cdot 0,1 + 3 \cdot 0,1 + 3 \cdot 0,1 = 0,7 + 0,2 + 0,3 + 0,3 = 1,5 \text{ b/simb}$$

desilo se *d*

S	$P(S_i)$	X_i	S_1		S_2	
$P(a d)$	0,4	1	0,4	1	*0,6	0
$P(b d)$	0,3	00	0,3*	00	0,4	1
$P(c d)$	0,2•	010	•0,3*	01		
$P(d d)$	0,1•	011				

$$L_d = 1 \cdot 0,4 + 2 \cdot 0,3 + 3 \cdot 0,2 + 3 \cdot 0,1 = 0,4 + 0,6 + 0,6 + 0,3 = 1,9 \text{ b/simb}$$

Ukupna dužina kodne riječi je:

$$\begin{aligned}L &= L_a P(a) + L_b P(b) + L_c P(c) + L_d P(d) = \\&= 1,9 \cdot 0,37 + 2 \cdot 0,24 + 1,5 \cdot 0,21 + 1,9 \cdot 0,18 = \\&= 0,703 + 0,48 + 0,315 + 0,342 = 1,84\end{aligned}$$